JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **10**, 74–92 (1974)

Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Spline-Funktionen

HELMUT WERNER

Institut für Numerische und Instrumentelle Mathematik, Westfälische Wilhelms-Universität, 44 Münster, West Germany

Communicated by Lothar Collatz

Received December 27, 1971

1. EINLEITUNG

In vielen theoretischen und praktischen Überlegungen haben heute die polynomialen Splinefunktionen die Polynome verdrängt, weil Polynome nicht anpassungsfähig genug sind. Es zeigt sich beispielsweise, daß bei einer guten Approximation einer glatten Funktion durch Polynome die Approximation der Ableitungen außerordentlich schlecht sein kann. Dieser Nachteil der Tschebyscheff-Approximation kann durch Benutzung von Splines vermieden werden.

Auch die Splineinterpolation erreicht jedoch die Grenze ihrer Anwendbarkeit, wenn man eine holomorphe Funktion in der Nähe eines Poles darzustellen versucht, man vergl. das Beispiel der Gammafunktion am Schluß von Abschnitt 2.

Es liegt nahe, in solchen Fällen die Klasse der zugelassenen Funktionen zu verallgemeinern, indem man glatte Funktionen benutzt, die stückweise aus rationalen Funktionen bestehen, sich also der Singularität besser anpassen lassen. Das in Abschnitt 2 behandelte Beispiel zeigt, daß man damit sogar bis in den Pol hinein gleichmäßig gute Näherungen einer transzendenten Funktion finden kann.

Man wird, um die neu auftretenden Phänomene zu studieren, zunächst eine möglichst einfache Klasse γ von rationalen Splines ins Auge fassen, etwa die kubischen Splines zu verallgemeinern suchen. Die kubischen Splines hängen in jedem Intervall zwischen zwei Knoten von 4 Parametern ab und, um die gleiche Anzahl von Parametern zur Verfügung zu haben, werden in der vorliegenden Arbeit ein quadratisches und ein lineares Polynom als Zähler und Nenner benutzt. Man kann damit die gleiche Interpolationsaufgabe wie bei kubischen Splines stellen. Herr Schaback hat dieses Problem in seiner Dissertation erfolgreich behandelt.

Copyright © 1974 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

Hier bemerken wir zunächst, wie man in einfachster Weise auch die singuläre Interpolation in dieser Theorie behandeln kann. Ist nämlich

$$f(x) = \frac{c_{-1}}{x - x_{-1}} + c_0 + c_1(x - x_{-1}) + \cdots,$$

so liegt es nahe, mit einem Ansatz

$$s(x) = \frac{c_{-1}}{x - x_{-1}} + c_0{}^* + c_1{}^*(x - x_{-1})$$

in dem Intervall zwischen Polstelle x_{-1} und dem ersten Knoten x_0 zu arbeiten. Im Knoten x_0 ist durch den Polbestandteil die zweite Ableitung $s''(x_0)$ bereits festgelegt, so daß man von x_0 aus die "reguläre" Interpolation durchführen kann.

Im folgenden Abschnitt 3 wird das Verhalten von Folgen rationaler Splinefunktionen der beschriebenen Arbeit untersucht. Es zeigt sich, daß eine Grenzfunktion $\bar{s}$ Unstetigkeiten in der 1. und 2. Ableitung in Knotenpunkten zeigen kann (solche Knoten werden dann von 1. oder 2. Art bezüglich $\bar{s}$ genannt).

Macht die erste Ableitung einen Sprung, so muß die Grenzfunktion $\bar{s}$ allerdings rechts und links von dem Knoten bis zum "übernächsten" Knoten linear sein; eine Unstetigkeit der zweiten Ableitung in einem Knoten kann nur auftreten, wenn wenigstens auf einer Seite der rationale Spline zu einer linearen Funktion entartet. Diese Eigenschaften und die schwache Konvexität sind kennzeichnend für alle Funktionen des Abschlusses $\bar{\gamma}$ der hier betrachteten rationalen Splines.

Im Abschnitt 5 wird gezeigt, der rationale Spline s ist die Tschebyscheff-Approximation einer stetigen Funktion $f(x)$, wenn eine Alternante mit $L(I) + 4 - d(s)$ Punkten existiert, $L(I)$ zählt die durch die Knoten erzeugten Teilintervalle des Intervalls I. Die Zahl $d(s)$ stellt eine Verallgemeinerung des bereits bei den rationalen Funktionen im Rahmen der Tschebyscheff-Approximation auftretenden Defekts dar. Wie die Überlegungen im Abschnitt 4 über die Nullstellenanzahl von Differenzen rationaler Splines aus $\bar{\gamma}$ zeigen, ist

$$d(s) := g(s) - 2 \cdot n_1(s) - n_2(s)$$

zu setzen. Dabei ist $n_j(s)$ die Anzahl der Knoten $j$ter Art von s und $g(s)$ die Anzahl der durch die Knoten erzeugten Teilstücke des Intervalls, in denen s linear ist. Es gilt nämlich, daß zwei nicht identische Splines s und $\bar{s}$ aus $\bar{\gamma}$ höchstens

$$N(s - \bar{s}; I) = L(I) + 2 - \max(d(s), d(\bar{s}))$$

Nullstellen (bei entsprechender Zählung, vgl. dazu Abschnitt 4) haben können.

2. Definitionen und Interpolationsaufgaben mit rationalen Splinefunktionen

Betrachtet werden zu endlichen reellen Zahlen α, β mit $\alpha < \beta$ die offenen, halboffenen oder abgeschlossenen Intervalle (α, β) bzw. $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, $[\alpha, \beta]$, die durch I bezeichnet werden. Gegeben seien weiterhin $l + 1$ Werte $(x_0, x_1, \ldots, x_l)$; $x_j \in I$; $x_0 < x_1 < \cdots < x_l$.

Sie werden in dieser Arbeit als *fest* vorausgesetzt und sollen als Knoten der Splinefunktionen dienen. Teilintervalle von I, die von *benachbarten* Knoten bzw. Intervallendpunkten α, β und benachbarten Knoten begrenzt werden, sollen *Teilstücke* von I genannt werden. Die Teilstücke sind in den Knoten stets abgeschlossen; in α, β abgeschlossen oder offen je nachdem, ob dort I abgeschlossen oder offen ist:

$$I_j := [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \ldots, l; \qquad I_0 := [\alpha, x_0] \cap I; \qquad I_{l+1} := [x_l, \beta] \cap I;$$

die Intervalle I_0 und I_{l+1} werden nur betrachtet, wenn sie positiven Inhalt haben. Dementsprechend bezeichne $\mathbb{K}$ die Menge der Indizes j, für die I_j eine positive Länge besitzt. Zuweilen ist es zweckmäßig, $x_{-1} := \alpha$ und $x_{l+1} := \beta$ zu setzen.

Die Klasse der *rationalen Spline-Funktionen* mit den gegebenen festen Knoten wird definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma := \{s(x) \mid s(x) = p_j(x)/q_j(x) \text{ für } x \in I_j, \forall j \in \mathbb{K}, \\ \text{Grad } \partial p_j(x) \leqslant 2, \text{ Grad } \partial q_j(x) \leqslant 1, s(x) \in C^2(I)\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

γ enthält insbesondere die Klasse $\mathscr{R}(2, 1)$ der rationalen Funktionen mit quadratischem Zähler und linearem Nenner, die in I stetig sind. Auf Grund dieser Definition hat $s(x)$ in I_j auch die Darstellung

$$s_{|I_j}(x) = a_j + b_j z + \begin{cases} c_j \cdot z^2 & \text{bzw.} \\ c_j/(d_j + e_j z) & \end{cases} \quad \text{mit} \quad z = x - x_j. \tag{2.2}$$

Den Koeffizienten c_j, d_j, und e_j kann man noch eine geeignete Normierungsbedingung auferlegen.

Aus der Darstellung (2.2) folgt, daß $s''(x)$ in einem Teilstück I_j entweder identisch verschwindet oder nullstellenfrei ist, und wegen der Stetigkeit von s'' in I gilt dann sogar

$$s''(x) \equiv 0 \qquad \text{oder} \qquad s''(x) \neq 0 \qquad \text{für} \quad \forall x \in I. \tag{2.3}$$

Wichtig für die folgenden Abschnitte ist die Möglichkeit, mit rationalen Splines zu interpolieren. In Analogie zu der Aufgabenstellung bei kubischen Splines stellt man die *reguläre Interpolationsaufgabe*.

Sei $I := [x_0, x_l]$ abgeschlossen. Gesucht ist ein $s \in \gamma$ mit

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad s(x_j) = f_j \text{ für } j = 0, \ldots, l, \\ &\text{(b)} \quad s'(x_0) \text{ oder } s''(x_0) = u, \\ &\qquad\; s'(x_l) \text{ oder } s''(x_l) = v \end{aligned} \tag{2.4}$$

zu gegebenen Werten f_j, u und v.

Allgemeiner könnte man fordern:

(b′) Zwei der Größen $s'(x_0)$, $s''(x_0)$, $s'(x_l)$, $s''(x_l)$ sollen vorgegebene Werte u, v annehmen.

Sind jedoch in *einem* Punkte, etwa x_0, zwei Werte gegeben, so ist im ganzen Intervallstück $[x_0, x_1]$ mit diesen Werten und $s(x_0) = f_0$, $s(x_1) = f_1$ die Funktion $s(x)$ bestimmt und man erhält die Werte der Ableitungen von $s(x)$ in x_1. Damit hat man genug Daten, um $s(x)$ in $[x_1, x_2]$ zu bestimmen. Dies führt sukzessiv zur Festlegung in ganz I. Mehr Aufwand erfordert die Ermittlung von $s(x)$, wenn im Punkte x_0 und x_l je eine Angabe vorliegt.

Diese Aufgabe hat Schaback [1] in seiner Dissertation neben anderen Fragen behandelt.

Das durch (2.3) beschriebene Verhalten der zweiten Ableitung von s bringt es mit sich, daß die zweiten Differenzenquotienten von $s(x)$ bezogen auf verschiedene oder auch zusammenfallende Punkte, in unserem Fall die Knoten x_j und die Vorgabe in den Randpunkten, entweder identisch verschwinden oder alle gleiches Vorzeichen besitzen müssen. Anders formuliert, notwendig für die Lösbarkeit der regulären Interpolationsaufgabe ist, daß

> eine beliebige lineare, eine konvexe oder eine konkave Funktion aus $C^2[I]$ existiert, die den in a) und b) gegebenen Bedingungen mit den Daten f_j, u, v genügt.

Schaback weist in seiner Dissertation nach, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Die Lösung des Interpolationsproblems ist eindeutig bestimmt in $[x_0, x_l]$.

Besonders interessant ist die Klasse γ jedoch für die Interpolation von Funktionen, die selbst Pole erster Ordnung besitzen. Man kann dann I offen wählen und versuchen, die Funktion bis zum Pol durch ein $s(x)$ anzunähern, während man bei den sonst üblichen Darstellungen meist für die Umgebung der Polstelle eine besondere Vorschrift zur Ermittlung der Funktionswerte (z.B. für ein Unterprogramm in einer Rechenanlage) geben mußte. Man darf davon ausgehen, daß Lage des Pols und Residuum bekannt sind.

Betrachtet man etwa den Fall, daß $f(x)$ in α einen Pol hat, in $(\alpha, \beta]$ regulär ist, so bietet sich die folgende *singuläre Interpolationsaufgabe* an: Sei $I := (\alpha, \beta]$, gesucht ist $s \in \gamma$ mit

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad s(x_j) = f_j \text{ für } j = 0,\dots, l,\\
&\text{(b)}\quad s'(x_l) \text{ oder } s''(x_l) = v, \qquad\qquad (2.5)\\
&\text{(c)}\quad s(x) = c/(x-\alpha) + a_0 + b_0 \cdot (x-\alpha) \text{ in } I_0
\end{aligned}$$

wobei f_j, v und das Residuum c in α vorgegeben sind. Analog kann man die Aufgabe für den Fall formulieren, daß der Pol in β liegt oder daß in α und β Pole 1. Ordnung auftreten.

Über die oben genannten Bedingungen hinaus, daß alle aus den Daten f_j und v gebildeten zweiten Differenzenquotienten gleiches Signum haben müssen, folgt jetzt als zusätzliche Forderung, daß auch das Signum von c den gleichen Wert haben muß. Denn dies folgt durch zweimaliges Differenzieren von (2.5c) unter Berücksichtigung der Stetigkeit von $s''(x)$ in x_0.

Daß diese Bedingung auch hinreichend ist, besagt folgender Satz.

SATZ 2.1. *Die singuläre Interpolationsaufgabe ist genau dann lösbar, wenn gilt*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn} c = \operatorname{sgn} \Delta^2(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})f \quad &\textit{für}\quad j = 0,\dots, l-1, \textit{ wenn } s',\\
j = 0,\dots, l-2 \textit{ und } l, &\textit{ wenn } s'' \textit{ in } x_l \textit{ vorgeschrieben ist}, \qquad (2.6)\\
x_{l+1} := x_{l+2} := x_l\,. &
\end{aligned}$$

Die Lösung ist in $(\alpha, x_l]$ *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es bleibt die Hinlänglichkeit zu zeigen. Aus (2.5c) folgt

$$s''(x_0) = 2(c/(x_0-\alpha)^3), \qquad \text{man beachte } x_0 \in I, \text{ also } x_0 > \alpha. \qquad (2.7)$$

Damit sind in x_0 die Werte $s(x_0)$ und $s''(x_0)$ vorgeschrieben, so daß nach dem von Schaback bewiesenen Resultat eine Lösung $\tilde{s}(x)$ der regulären Aufgabe, bezogen auf das Intervall $[x_0, x_l]$ existiert. Die noch freien Parameter a_0 und b_0 bestimmen sich aus den Bedingungen des stetigen Anschlusses in x_0, nämlich

$$s'(x_0) = b_0 - c/(x_0-\alpha)^2 = \tilde{s}'(x_0)$$

und (2.8)

$$s(x_0) = a_0 + b_0(x_0-\alpha) + c/(x_0-\alpha) = \tilde{s}(x_0).$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehme man an, daß zwei Lösungen $s(x)$ und $\bar{s}(x)$ vorliegen. Die Differenz $w := s - \bar{s}$ ist dann in I_0 linear, also ist dort $w'' = 0$. Dann löst w in $[x_0, x_1]$ ein homogenes reguläres Interpolationsproblem und mit den Anschlußbedingungen (2.8) folgt, daß auch im Teilstück I_i die lineare Funktion w identisch verschwindet. Dies besagt aber, daß s und $\bar{s}$ in $(\alpha, x_l]$ identisch sind.

Die Durchführung der Beweise für die anderen Fälle der singulären Interpolationsaufgabe verläuft analog und kann dem Leser überlassen bleiben.

Man kann auch im singulären Falle die zusätzlichen Daten in dem singulären Randpunkt vorschreiben. Zum Beispiel kann man in (2.5) statt (b) verlangen:

(c′) In I_0 sei $s(x) = c/(x - \alpha) + a_0 + b_0(x - \alpha)$ und c sowie eine der Größen a_0, b_0 ist vorgegeben.

Soll $s(x)$ in x_0 mit $f(x_0)$ übereinstimmen, so ist damit der einzige noch freie Parameter von $s(x)$ in I_0 festgelegt. Man bekommt in x_0 die Daten, mit denen man schrittweise $s(x)$ interpolierend in I_1,..., definieren kann.

Für die Gammafunktion erhält man beispielsweise mit $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $n = 4$, also $x_i = (i + 1)/4$, $i = 0,..., 3$ für die Größe $\eta(x) = |\Gamma(x) - s(x)|$ folgende Schranken:

1. *Vorgabe*: (“*Randwertaufgabe*”)

$$s(x_0) = \Gamma(x_0), \qquad s''(x_0) = 2/x_0^3,$$
$$s(x_1) = \Gamma(x_1), \qquad s'(x_1) = \Gamma'(x_1).$$

	im Intervall $[\frac{1}{4}, 1]$	Fortsetzung auf $[0, \frac{1}{4}]$
rationaler Spline	$0{,}552 \cdot 10^{-3}$	$0{,}35 \cdot 10^{-1}$
kubischer Spline	$0{,}16 \cdot 10^{0}$	(∞)

2. *Vorgabe*: (“*Anfangswertaufgabe*”)

$s(x) = 1/x + c_0 + c_1 \cdot x$, mit $c_0 := \lim_{x\to 0}[\Gamma(x) - \frac{1}{x}]$, Interpolation in den Punkten x_i.

Zum Vergleich wurde mit gleichen Anfangsdaten in x_0 beginnend auch ein interpolierender kubischer Spline gerechnet.

Schranken für η in	$[0, \frac{1}{4}]$,	Fortsetzung auf $[\frac{1}{4}, 1]$
rationaler Spline	$1{,}0 \cdot 10^{-2}$	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$
kubischer Spline	—	$3{,}1 \cdot 10^{0}$ (!!)

Der kubische Spline bäumt sich gewissermaßen auf (Numerische Instabilität).

Eine ähnliche Erscheinung beobachtet man in geringem Maße allerdings auch bei der Fortsetzung des rationalen Splines. Auf die hier auftretenden numerischen Phänomene soll in einer anderen Arbeit eingegangen werden.

Zum Vergleich sei außerdem auf die in Werner [2, Seite 345, 346; 3] angegebenen Beispielen verwiesen. Dort werden T-Approximationen für $\Gamma(1 + x)$ mit $x \in [0, 1]$ angegeben:

$$R_{2,1}(x) = \frac{1{,}48162x^2 - 0{,}482637x + 2{,}75441}{x + 2{,}75721}, \quad \eta \leqslant 1{,}02 \cdot 10^{-3},$$

$$R_{1,2}(x) = \frac{1{,}65105 + 0{,}598785x}{1{,}64931 + 1{,}59835x - x^2}, \quad \eta \leqslant 0{,}73 \cdot 10^{-3},$$

$$R_{0,3}(x) = \frac{6{,}27348}{6{,}27109 + 3{,}71969x - 4{,}71969x^2 + x^3}, \quad \eta \leqslant 0{,}382 \cdot 10^{-3}.$$

Mit einem Polynom 3. Grades würde man nur die Güte $1{,}35 \cdot 10^{-3}$ erreichen.

3. Die Abschliessung der Klasse γ

Will man zu Existenzaussagen der Approximationstheorie kommen, so muß man Grenzprozesse durchführen können. Man muß also Cauchy-Folgen in γ betrachten. Für unsere Zwecke reicht es aus, wenn Konvergenz als kompakte Konvergenz, d.h. gleichmäßige Konvergenz in jedem abgeschlossenen in (α, β) enthaltenen Teilintervall definiert wird.

Für die Approximation soll allerdings später der Abstand durch

$$\| s - \bar{s} \|_I := \sup_I \, (w(x) \cdot | s(x) - \bar{s}(x)|), \tag{3.1}$$

$w(x)$ stetig, positiv in I gemessen werden.

Es sei darauf hingewiesen, daß dieser Abstand unendlich sein kann, wenn I nicht abgeschlossen ist. Denn dann kann s oder $\bar{s}$ in einem Intervallendpunkt einen Pol besitzen, und für $w(x) \equiv 1$, $I = (\alpha, \beta]$, $\bar{s}(x) \equiv 0$, gilt dann etwa $\| s - 0 \|_I = \infty$.

Diese Schwierigkeit kann man durch Wahl eines geeigneten Gewichtes $w(x)$, das in der Umgebung von α das Verhalten const $\cdot\, (x - \alpha) + o(x - \alpha)$ zeigt, beseitigen.

Auf diese Weise wird z.B. Approximation bezüglich des relativen Fehlers möglich.

Sei $I(\delta) := [\alpha + \delta, \beta - \delta]$ mit $\delta \in (0, (\beta - \alpha)/2)$. Eine Cauchy-Folge aus γ im oben angegebenen Sinne hat dann die Eigenschaft, daß für jedes feste δ

des genannten Intervalles gleichmäßige Konvergenz eintritt. Man darf deshalb im folgenden voraussetzen, daß eine Folge mit

$$\{s_k\}_{k=1\,2,\dots}, \qquad s_k \in \gamma, \qquad \lim_{k,m\to\infty} \| s_k - s_m \|_{I(\delta)} = 0 \tag{3.2}$$

für jedes $\delta > 0$ vorliegt.

Dann gilt zunächst der Satz.

SATZ 3.1. *Es gibt eine in I stetige Funktion $\bar{s}$, die in jedem Teilstück von I eine Funktion von $\mathscr{R}(2.1)$ ist und den Grenzwert der Folge $\{s_k\}$ im Sinne kompakter Konvergenz liefert.*

Der Beweis dieses Sachverhaltens stützt sich auf:

HILFSSATZ 3.2. *Gilt $\| s \|_{I(\delta)} \leqslant K(\delta)$ für ein $s \in \gamma$ und ist $\epsilon \in (0, ((\beta - \alpha)/2) - \delta)$, so folgt*

$$| s'(x)| \leqslant \frac{2K(\delta)}{\epsilon \cdot \min_{I(\delta)} | w(x)|} \text{ in } I(\delta + \epsilon). \tag{3.3}$$

Zum Beweis dieses Hilfssatzes beachtet man, daß nach (2.3) das Signum von $s''(x)$ in I konstant ist. Deshalb ist $s'(x)$ monoton und seine Werte in $I(\epsilon + \delta)$ werden durch die 1. Differenzenquotienten

$$\varDelta^1(\alpha + \delta, \alpha + \delta + \epsilon)s \qquad \text{und} \qquad \varDelta^1(\beta - \delta - \epsilon, \beta - \delta)s$$

eingeschlossen, deren Beträge man durch

$$2/\epsilon \cdot \max_{I(\delta)} | s(x)| \leqslant 2K(\delta)/\epsilon \cdot \min_{I(\delta)} | w(x)|$$

abschätzen kann.

Beweis von Satz 3.1. Sei $\delta \in (0, (\beta - \alpha)/2)$ fest gewählt, Nach (3.2), d.h. auf Grund der kompakten Konvergenz, gibt es eine Schranke K, so daß

$$\| s_k(x)\|_{I(\delta)} \leqslant K \qquad \text{gleichmäßig gilt für} \quad k = 1, 2,\dots . \tag{3.4}$$

Die Funktionen $s_k(x)$ sind also in jedem Teilstück I_j von $I(\delta)$ gleichmäßig beschränkte rationale Funktionen aus $\mathscr{R}(2, 1)$, die punktweise konvergieren. In I_j ist dann die Grenzfunktion $\bar{s}(x)$ aus $\mathscr{R}(2, 1)$, wobei ebenso wie bei $s_k(x)$ Entartungen zu linearen Funktionen möglich sind. Da δ beliebig ist, so ist damit gezeigt, daß $\bar{s}$ in jedem Teilstück von I eine rationale Funktion der besagten Form ist.

Zu untersuchen bleibt die Verheftung der einzelnen Teile der Funktion $\bar{s}$ in den Knoten. Sei δ_1 positiv und klein, so kann man mit $\delta = \epsilon = \delta_1/2$

auf Grund der kompakten Konvergenz nach (3.2) den Hilfssatz 3.2 anwenden und schließen, daß die Funktionen $s_k(x)$ in $I(\delta_1)$ gleichgradig stetig sind. Folglich ist auch die Grenzfunktion $\bar{s}(x)$ in $I(\delta_1)$ stetig. Damit ist der Satz bewiesen.

Da jede Funktion aus γ zweimal stetig differenzierbar ist, so wird man erwarten, daß man auch über die Grenzfunktion $\bar{s}$ mehr als Stetigkeit aussagen kann. Diesem Zwecke dient die folgende Definition.

DEFINITION 3.3. Der Knoten x_j ist für die Funktion $\bar{s}(x)$ von $k$ter Art, wenn in der Umgebung von x_j die Ableitungen von $\bar{s}(x)$ bis zur Ordnung $k - 1$ stetig sind, während die $k$te Ableitung eine Sprungstelle im Punkte x_j besitzt.

Die Funktionen von γ sind also dadurch gekennzeichnet, daß sie höchstens Knoten 3. Art besitzen. Die zum Abschluß von γ gehörenden Funktionen klassifizieren die beiden folgenden Sätze.

SATZ 3.4. *Ist $\bar{s}$ Grenzfunktion einer Cauchy-Folge aus γ, so ist $\bar{s}$ stetig in I, rationale Funktion aus $\mathscr{R}(2, 1)$ in jedem Teilstück und es können Knoten* 1., 2., *und* 3. *Art auftreten. Rechts und links von einem Knoten* 1. *Art muß $\bar{s}(x)$ linear sein, während $\bar{s}(x)$ nur rechts oder links von einem Knoten* 2. *Art linear sein muß. Ist $\bar{s}(x)$ in einem inneren Teilstück von I eine lineare Funktion $a + bx$, so muß $\bar{s}(x)$ in einem der angrenzenden Teilstücke ebenfalls mit der Funktion $a + bx$ übereinstimmen.*

Anmerkung. Aus dem Satz folgt unmittelbar, daß die Knoten 1. Art nicht benachbart sein können.

Es kann natürlich vorkommen, daß in einem Knoten alle Ableitungen stetig sind, wie die letzte Aussage des Satzes an einem Spezialfall verdeutlicht.

Beweis. Sind in der Cauchy-Folge $\{s_k\}$ fast alle Funktionen $s_k(x)$ linear, so ist auch die Grenzfunktion linear. Von diesem trivialen Fall darf also im folgenden abgesehen werden und wir können, da zur Charakterisierung der Grenzfunktion auch auf Teilfolgen zurückgegriffen werden darf—wovon noch Gebrauch gemacht wird—annehmen, daß für jedes s_k der Folge gilt

$$s_k''(x) \neq 0 \text{ in } I.$$

Es werde nun ein fester, innerer Knoten x_j gewählt. Die Funktionen $s_k(x)$ werden in den Teilstücken I_j und I_{j+1} untersucht. Obwohl die folgenden Darstellungen von s_k nur für die Restriktionen auf eines dieser Intervalle gelten, soll auf Anbringen eines Index j, etwa bei den Koeffizienten, verzichtet werden. Es gelte in I_j die Darstellung

$$s_k(x) = a_k + z[b_k + z \cdot c_k/q_k(z)]$$

mit

$$q_k(z) = d_k + e_k z > 0,\ d_k^2 + e_k^2 = 1, \tag{3.5}$$

$$z = x - x_j\,,$$

und $c_k \neq 0$, so daß die Koeffizienten eindeutig sind.

In I_{j+1} kann man $s_k(x)$ in gleicher Form darstellen mit anderen Koeffizienten. Jedoch bestehen auf Grund der Stetigkeit von $s_k(x)$ und seiner ersten beiden Ableitungen Beziehungen zwischen den Koeffizienten, es ist

$$s_k(x_j) = a_k\,, \qquad s_k'(x_j) = b_k\,, \tag{3.6}$$

so daß in I_{j+1} gelten muß

$$s_k(x) = a_k + z[b_k + z \cdot \bar{c}_k/\bar{q}_k(z)] \qquad \text{mit} \quad z = x - x_j \text{ (wie vorher)}, \quad \bar{q}_k(z) = \bar{d}_k + \bar{e}_k z > 0, \quad \bar{d}_k^2 + \bar{e}_k^2 = 1. \tag{3.7}$$

Die Stetigkeit der zweiten Ableitungen liefert noch

$$\tfrac{1}{2}s_k''(x_j) = c_k/q_k(0) = \bar{c}_k/\bar{q}_k(0). \tag{3.8}$$

Da es Teilintervalle positiver Länge von I_j und I_{j+1} gibt, in denen die Funktionen $|s_k(x)|$ gleichmäßig beschränkt sind, so schließen wir wie im Beweis von Satz 3.1, daß die Grenzfunktionen der $s_k(x)$ wieder von der Gestalt (3.5) bzw. (3.7) sind, wobei zudem die Koeffizienten die Limiten der entsprechenden Koeffizienten der $s_k(x)$ sind. Es werde geschrieben

$$a = \lim a_k\,, \ldots, \qquad \bar{e} = \lim \bar{e}_k\,. \tag{3.9}$$

Es gilt weiterhin

$$d^2 + e^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad \bar{d}^2 + \bar{e}^2 = 1. \tag{3.10}$$

Daraus folgt, daß die Grenzfunktionen $q(z)$, $\bar{q}(z)$ höchstens eine Nullstelle auf der reellen Achse haben können und wegen der über q_k und $\bar{q}_k$ in (3.5) und (3.7) gemachten Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned} q(z) &> 0 \qquad \text{in} \quad x_{j-1} < x < x_j\,, \\ \bar{q}(z) &> 0 \qquad \text{in} \quad x_j < x < x_{j+1}\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Zu diskutieren ist nun das Verhalten von $q(0)$ und $\bar{q}(0)$, denn daraus werden die gemachten Aussagen leicht folgen.

Nach dem Verhalten der $s_k''(x_j)$ unterscheiden wir zwei Fälle.

1. *Fall*: $\limsup |s_k''(x_j)| < \infty$. Es darf wieder o.B.d.A. Konvergenz angenommen werden. Sei

$$M := \tfrac{1}{2} \lim s_k''(x_j). \tag{3.12}$$

Da nach (3.8) gilt

$$2c_k = q_k(0) \cdot s_k''(x_j) \qquad \text{und} \quad 2 \cdot \bar{c}_k = \bar{q}_k(0) \cdot s_k''(x_j),$$

so gilt auch

$$c = q(0) \cdot M \qquad \text{und} \qquad \bar{c} = \bar{q}(0) \cdot M. \tag{3.13}$$

Weitere Fallunterscheidung:

(1a) Ist $M = 0$, so folgt $c = \bar{c} = 0$. In inneren Punkten von I_j und I_{j+1} erhält man aus (3.5) und (3.7) für $k \to \infty$ die Grenzfunktion

$$s_k(x) \to a + z \cdot b = \bar{s}(x), \tag{3.14}$$

die in natürlicher Weise durch $\bar{s}(x_j) := a$ in x_j stetig ergänzt wird. $\bar{s}(x)$ ist in $I_j \cup I_{j+1}$ linear.

(1b) Sei $M \neq 0$. Wegen (3.13) verschwinden c und $q(0)$ beide oder sind beide ungleich Null. Für die Grenzfunktion folgt aus (3.5) für I_j :

$$\begin{aligned} c = 0, q(0) = 0 &\Rightarrow \bar{s}(x) = a + z \cdot b, \\ c \neq 0, q(0) \neq 0 &\Rightarrow \bar{s}(x) = a + z[b + z \cdot c/q(z)]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Analog gilt in I_{j+1} :

$$\begin{aligned} \bar{c} = 0, \bar{q}(0) = 0 &\Rightarrow \bar{s}(x) = a + z \cdot b \\ \bar{c} \neq 0, \bar{q}(0) \neq 0 &\Rightarrow \bar{s}(x) = a + z[b + z{\cdot}c/\bar{q}(z)]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Es können alle 4 möglichen Kombinationen auftreten. In allen Fällen ist $\bar{s}'(x)$ in x_j stetig.

Für $c = \bar{c} = 0$ und auch für $c \neq 0$, $\bar{c} \neq 0$ ist wegen (3.8) die zweite Ableitung in x_j ebenfalls stetig. In den beiden anderen Fällen $c = 0$, $\bar{c} \neq 0$ und $c \neq 0$, $\bar{c} = 0$ hat $\bar{s}''(x)$ in x_j einen Sprung—ein *Knoten* 2. *Art* liegt vor.

2. *Fall*: $\limsup |s_k''(x_j)| = \infty$. Es werde etwa $M := \lim s_k''(x_j) = \infty$

angenommen. Aus (3.8) folgt diesmal wegen der Konvergenz der c_k bzw. $\bar{c}_k$ die Aussage

$$q(0) = \lim q_k(0) = \lim \left(\frac{2c_k}{s_k''(x_j)}\right) = 0$$

und analog $\bar{q}(0) = 0$, es ist also $q(z) = e \cdot z$ und $\bar{q}(z) = \bar{e} \cdot z$, wegen der Normierung und (3.11) ist $e = -1$, $\bar{e} = +1$. Für die Grenzfunktion gilt also

$$\begin{aligned} &\text{in } I_j \quad : \bar{s}(x) = a + z[b - c] \\ &\text{in } I_{j+1} : \bar{s}(x) = a + z[b + \bar{c}]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

In diesem Fall ist also $\bar{s}(x)$ rechts und links von x_j linear und es können die rechtsseitige und linksseitige 1. Ableitung in x_j verschieden sein—d.h. es kann ein *Knoten* 1. *Art* auftreten.

Es bleibt nur noch die letzte Behauptung des Satzes zu verifizieren. Sei $\bar{s}(x)$ in I_j linear. Man betrachte die in (3.5) auftretenden Nenner und ihren Grenzwert. Entweder $q(x_j)$ oder $q(x_{j-1})$ ist ungleich Null, d.h. in einem dieser Punkte konvergieren die zweiten Ableitungen der $s_k(x)$ gegen die zweite Ableitung von $\bar{s}(x)$, d.h. gegen 0. Also ist in diesem Punkte M gemäß (3.12) gleich Null und es tritt Fall (1a) ein. Das beendet den Beweis von Satz 3.4.

Zu den charakterisierenden Eigenschaften der Funktionen $\bar{s}$, die als Limiten der Cauchy-Folgen auftreten können, kommt noch eine globale Eigenschaft hinzu.

SATZ 3.5. *Die zweiten Differenzenquotienten einer Grenzfunktion $\bar{s}$ in bezug auf Knotenpunkte erfüllen*

$$\sigma \cdot \Delta^2(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})\bar{s} \geqslant 0, \tag{3.18}$$

dabei ist $\sigma = +1$ oder -1 durch $\bar{s}$ allein festgelegt.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch Grenzübergang aus der gleichen Eigenschaft der Funktionen s_k einer geeignet ausgewählten Teilfolge mit $\sigma \cdot \operatorname{sgn} s_k''(x) > 0$, σ fest, deren Grenzwert $\bar{s}$ ist.

Es bleibt nur noch die Frage, ob jede durch die in den vorangegangenen beiden Sätzen angegebenen Eigenschaften charakterisierte Funktion als Grenzwert von Cauchy-Folgen aus γ auftreten kann. Eine positive Antwort gibt folgender Satz.

SATZ 3.6. *Es sei $\bar{s}$ eine Funktion mit den durch Satz* 3.4 *und* 3.5 *beschriebenen Eigenschaften. Dann gibt es eine Folge aus γ, die gleichmäßig gegen $\bar{s}$ konvergiert.*

Es werde $J \subset I$ ein Linearitätsintervall bzw.—teilstück einer Funktion s genannt, wenn s in J linear ist. Gehört die Funktion dagegen zu $C^2(J)$ und verschwindet ihre zweite Ableitung in J nicht, so wird J auch als Regularitätsintervall bezeichnet.

Beweis. Gehört $\tilde{s}$ zu γ, so kann man es selbst zur Erzeugung der Folge benutzen.

Gehört $\tilde{s}$ nicht zu γ, so kann angenommen werden, daß kein mit den Knoten als Argumente berechneter zweiter Differenzenquotient negativ ist. Mit den zu $\tilde{s}$ gehörenden Knoten 1. und 2. Art teile man I in Intervalle I_1 ,... ein.

Ist $\tilde{s}$ in $I_k = [y, z]$ linear, so bilde man

$$s_\epsilon^*(x) := \tilde{s}(x) - \epsilon(z - x)(x - y) \qquad \text{für} \quad x \in I_k\,, \tag{3.19}$$

im anderen Falle setze man $s_\epsilon^*(x) \equiv \tilde{s}(x)$. Für hinreichend kleine, positive Werte ϵ erhält man für alle bezüglich der Knoten berechneten zweiten Differenzenquotienten $\Delta_t^2(x_j\,, x_{j+1}\,, x_{j+2})\, s_\epsilon^*(t)$ positive Werte. Um zu einem Interpolationsproblem zu kommen, füge man zur Vorgabe der Funktionswerte in den Knoten im regulären Falle die 1. Ableitungen von $s_\epsilon^*(x)$ in den Randpunkten von I, im singulären Falle das Residuum von s in den zugehörigen Randpunkten hinzu.

Nach Abschnitt 2 gibt es zu diesen Daten eine Interpolierende $s_\epsilon(x)$ aus γ.

Den singulären Fall führt man jetzt ebenso wie im Beweis von Satz 2.1 auf den regulären Fall zurück, indem man I um das den Pol berührende Teilstück verkürzt und in dem verkürzten, wieder mit I bezeichneten Intervall als zusätzliches Datum die durch das Residuum bestimmte zweite Ableitung in dem neuen Randpunkt verwendet.

(I) Für $\epsilon \to 0$ konvergiert $s_\epsilon(x)$ in jedem Linearitätsintervall gleichmäßig gegen $\tilde{s}(x)$.

(a) Sei nämlich das Linearitätsintervall $[y, z]$ durch den Knoten x_k in zwei Teile geteilt.

Wegen der Konvexität liegt dann im Intervall $[y, x_k]$ die Funktion $s_\epsilon(x)$ zwischen den Geraden, die durch die Punkte

$$(z, \tilde{s}(z)) \text{ und } (y, \tilde{s}(y)) \text{ sowie } (z, \tilde{s}(z)) \text{ und } (x_k\,;\, \tilde{s}(x_k) + \epsilon \cdot (z - x_k)(x_k - y))$$

bestimmt werden. $\epsilon \to 0$ liefert dann für dieses Intervall die Behauptung, analog schließt man für $[x_k\,, z]$.

(b) Besteht das Linearitätsintervall nur aus einem Teilstück, so wird ein Randpunkt auch Randpunkt von I sein und man hat statt einer Sekante jetzt die Tangente der Funktion $s_\epsilon^*(x)$, die mit $\epsilon \to 0$ gegen die durch $(z, \tilde{s}(z))$ und $(y, \tilde{s}(y))$ bestimmte Gerade strebt, zur Einschließung zur Verfügung.

(II) In Regularitätsintervallen erhält man analoge Einschließungen von $s_\epsilon(x)$ zwischen Sehnen und Sekanten, die mit Hilfe der gegebenen Werte $s_\epsilon^*(x_j)$ bestimmt werden können.

Damit sind die Funktionen $s_\epsilon(x)$ gleichmäßig in Schranken eingeschlossen und man kann für eine Nullfolge ϵ_ν Konvergenz gegen eine Funktion $s^*(x)$ unterstellen.

Es bleibt zu zeigen, daß $s^*(x)$ auch in den Regularitätsintervallen von $\bar{s}(x)$ mit $\bar{s}(x)$ zusammenfällt.

Die Funktion $s^*(x)$ wird qualitativ durch die Sätze 3.4 und 3.5 beschrieben. Sie kann also weder in einem inneren Regularitätsintervall von $\bar{s}$, das nur aus einem Teilstück besteht, linear sein, noch in einem Regularitätsintervall von mehr Teilstücken, da der 2. Differenzenquotient über die zugehörigen Werte von s^* nicht verschwindet. Der Satz 3.4 verlangt aber Linearität in wenigstens zwei benachbarten Teilstücken. Für ein an den Rand reichendes, aus einem Teilstück bestehendes Regularitätsintervall ist im Randpunkt von I nach Konstruktion jedoch die 1. Ableitung vorgeschrieben und die Tangente ist von der Sekanten wegen der Regularität verschieden. Regularitätsintervalle von $\bar{s}$ sind also auch solche von s^*. Die Endpunkte eines Regularitätsintervalls sind Knoten 2. Art. Die angrenzenden Linearitätsintervalle bzw. Randvorgaben in x_0 und x_l legen wegen der Stetigkeit der 1. Ableitung Daten für eine reguläre Interpolation fest und diese ist nach Schaback eindeutig. Also muß auch in jedem Regularitätsintervall $s^*(x)$ mit $\bar{s}(x)$ zusammenfallen.

Da diese Folgerung für jede Grenzfunktion einer Teilfolge der $s_\epsilon(x)$ anwendbar ist, so ist damit die Konvergenz der $s_\epsilon(x)$ gegen $\bar{s}(x)$ nachgewiesen. Es ist klar, daß sich im singulären Fall die Konvergenz auch noch auf das weggelassenen Teilstücke von I überträgt.

Durch die vorangehenden Sätze ist also die *Abschließung* $\bar{\gamma}$ der durch γ beschriebenen rationalen Spline-Funktionen bezüglich der kompakten Konvergenz in I charakterisiert.

4. Nullstellenzählung

Hinreichende Kriterien werden in der Theorie der Tschebyscheff-Approximation meist mit Hilfe der Aussage bewiesen, daß die Differenz zweier Funktionen nicht mehr als eine gewisse Anzahl Nullstellen besitzen kann. Diese Nullstellenanzahl kann auch noch durch spezielle Eigenschaften, z.B. den Grad der Entartung bei rationalen Funktionen, weiter verringert werden.

Ähnliche Verhältnisse liegen bei den hier betrachteten rationalen Spline-

Funktionen vor. Um zu einer übersichtlichen Formulierung zu gelangen, werden folgende Konventionen getroffen. Sei $J \subset I$ ein von Knoten oder α, β begrenztes Intervall, dann sei

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(J) &:= \text{Anzahl der Teilstücke des Intervalls } J \text{ ("Länge von } J\text{");} \\ N(r, J) &:= \text{Anzahl der Nullstellen von } r \text{ in } J; \\ g(s) &:= \text{Anzahl der Teilstücke, in denen } s \in \gamma \text{ linear ist,} \\ n_k(s) &:= \text{Anzahl der Knoten, die bezüglich } s \text{ von } k\text{ter Art sind.} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Es wird sich als zweckmäßig erweisen, die *Degeneration* (Entartung) von s durch den Defekt

$$d(s) := g(s) - 2 \times n_1(s) - n_2(s) \tag{4.2}$$

zu definieren.

Beachtet man, daß jeweils nur *ein* Endpunkt eines Teilstückes, in dem s linear ist, ein Knoten 1. oder 2. Art von s sein kann und daß zu einem Knoten 1. Art rechts *und* links ein solches Intervall gehört, so ist klar, daß der Defekt in der Tat nicht negativ sein kann.

Verschwindet eine Funktion in einem Teilstück bzw. mehreren zusammenhängenden Teilstücken identisch, so gilt dies bei der Nullstellenzählung im folgenden als *einfache* Nullstelle. Innere Nullstellen, in denen kein Vorzeichenwechsel stattfindet, können doppelt gezählt werden.

In Analogie zu den Aussagen bei rationalen Funktionen gilt folgende Aussage.

SATZ 4.1. *Seien $s, \bar{s} \in \bar{\gamma}$. Dann hat die Differenz $s - \bar{s}$ in I höchstens $\mathscr{L}(I) + 2 - \max(d(s), d(\bar{s}))$ Nullstellen.*

Anmerkung. Man kann den Satz auch auf Teilintervalle von I anwenden, die dann in der Formulierung an die Stelle von I treten, und ersieht daraus, daß die Nullstellen auch nicht auf einzelne Teilstücke oder Teilintervalle zusammengedrängt werden können.

Beweis. Sei $r(x) := s(x) - \bar{s}(x)$.

Zunächst werden Spezialfälle betrachtet.

(1) Gelte $s(x) = a + bx$ in I. Da $\bar{s}(x)$ konvex, konkav oder linear ist, so hat $r(x)$ bei Beachtung obiger Konvention höchstens zwei Nullstellen in I. In diesem Fall ist $d(s) = \mathscr{L}(I)$, also ist die Behauptung verifiziert.

(2) Sei $s(x) \in \gamma$, $s''(x) \neq 0$. Es seien $k_1 < \cdots < k_{n_1}$ die Indizes der zu $\bar{s}$ gehörenden Knoten 1. Art. Mit Hilfe dieser Knoten werde I in Teilintervalle J_j zerlegt.

Sei l_j die Anzahl der in J_j enthaltenen Linearitätsteilstücke von $\tilde{s}$, sowie n_{2j} der in J_j enthaltenen Knoten 2. Art von $\tilde{s}$. Diese Knoten zerlegen J_j in $(n_{2j} + 1)$ Intervalle, die abwechselnd Regularitäts- und Linearitätsintervalle sind.

In einem Linearitätsintervall ist $s'(x)$ monoton, $\tilde{s}'$ konstant, so daß $r'(x)$ dort höchstens eine Nullstelle besitzt.

In einem Regularitätsintervall R hat

$$r''(x) = 2\left(\frac{ce^2}{(ex + d)^3} - \frac{\tilde{c}\tilde{e}^2}{(\tilde{e}x + \tilde{d})^3}\right) \tag{4.3}$$

in jedem Teilstück höchstens eine Nullstelle.

Die Anzahl der Nullstellen von $r'(x)$ kann nach dem Satz von Rolle demnach durch

$$N(r'; R) \leqslant 1 + \mathscr{L}(R)$$

abgeschätzt werden.

Summiert man über die Teilintervalle von J_j, so erhält man in der Gesamtanzahl der Regularitätsteilstücke vermehrt um die Anzahl der Teilintervalle von J_j eine Schranke für die Nullstellenzahl von $r'(x)$ in J_j, d.h.

$$N(r'; J_j) \leqslant (\mathscr{L}(J_j) - l_j) + (n_{2j} + 1). \tag{4.4}$$

Da $r(x)$ in J_j stetig differenzierbar ist, so folgt durch nochmaliges Heranziehen des Satzes von Rolle

$$N(r; J_j) \leqslant \mathscr{L}(J_j) - l_j + n_{2j} + 2. \tag{4.5}$$

Summiert man über j, so erhält man als Schranke aller in I enthaltenen Nullstellen von $r(x)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} N(r; I) &\leqslant \sum \mathscr{L}(J_j) - \sum l_j + \sum n_{2j} + 2 \cdot (n_1 + 1) \\ &= \mathscr{L}(I) - g(\tilde{s}) + n_2(\tilde{s}) + 2n_1(\tilde{s}) + 2 = \mathscr{L}(I) - d(\tilde{s}) + 2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Da $d(\tilde{s}) = g(s) - n_2(\tilde{s}) - 2 \cdot n_1(\tilde{s}) \geqslant 0 = d(s)$, so kann dies als Verifikation der obigen Formel für diesen Fall angesehen werden.

(3) Allgemeiner Fall: Seien s^* und $\tilde{s}$ Funktionen aus $\bar{\gamma}$. Sei $r^* := s^* - \tilde{s}$. Es soll wieder eine Abschätzung von $N(r^*; I)$ gefunden werden, in die nur $d(\tilde{s})$ eingeht, denn es kann $d(s^*) \leqslant d(\tilde{s})$ angenommen werden. Der obige Fall (2) legt es nahe, wie dort mit Hilfe der Knoten 1. Art von $\tilde{s}$ eine Einteilung von I vorzunehmen. Werden die obigen Bezeichnungen verwendet, so genügt es, für diesen Fall (4.5) zu verifizieren.

Dazu werde ein festes Intervall J_j betrachtet. Bei dem Versuch, den Satz von Rolle anzuwenden, stören möglicherweise in J_j liegende Knoten 1. Art von s^*.

Einer Idee von Braess folgend, durch die mein ursprünglicher Beweis wesentlich verkürzt wird, approximiert man s^* in J_j durch eine Funktion $s \in \gamma$.

Die Anzahl der Nullstellen von r^* in J_j sei m. Dann kann man $m - 1$ Punkte so finden, daß sie zusammen mit der ersten und letzten Nullstelle eine Menge $z_0, ..., z_m$ bilden, für die die Differenzenquotienten

$$\Delta(z_{i-1}, z_i)\, r^* \qquad (i = 1, ..., m)$$

mit i alternierendes Vorzeichen besitzen. Die Approximation von s^* durch s sei nun so gut, daß diese Eigenschaft für $r := s - \bar{s}$ erhalten bleibt. $\bar{s}$ und s gehören zu $C^1(J_j)$. Man kann also den Mittelwertsatz anwenden und schließen, daß m Punkte existieren, in denen das Vorzeichen der Funktion r' oszilliert. Für die Anzahl der Nullstellen von r' gilt also

$$m - 1 \leqslant N(r', J_j).$$

Diese rechte Seite wurde aber durch die Überlegung von 2) gemäß (4.4) abgeschätzt. Für m gilt also die Abschätzung (4.5). Damit ist alles bewiesen.

5. Existenz bester Approximationen und hinreichende Bedingungen für beste Approximationen aus $\bar{\gamma}$

Die bereitgestellten Hilfsmittel erlauben es, ohne Schwierigkeiten einige Fragen der Approximationstheorie mit Funktionen aus $\bar{\gamma}$ zu lösen.

In I sei eine stetige Gewichtsfunktion gegeben. Gefragt ist nach der Existenz einer besten Approximierenden zu vorgegebener in I stetiger Funktion $f(x)$ im Sinne der Tschebyscheff'schen Norm (3.1).

Damit diese Frage sinnvoll ist, werde die Existenz eines Elements $s_0 \in \bar{\gamma}$ mit

$$\|f - s_0\|_I < \infty \tag{5.1}$$

vorausgesetzt. Ist I abgeschlossen, so ist die Forderung trivialerweise erfüllt, wir können hier aber auch Pole in den Randpunkten von I erfassen. Oft wird $s_0 \equiv 0$, d.h. $\|f\|_I < \infty$ gelten.

Satz 5.1. *Unter der Voraussetzung* (5.1) *existiert eine beste Approximierende $\bar{s}$ aus $\bar{\gamma}$ zu $f(x)$.*

Zum Beweis betrachte man eine Minimalfolge $\{s_k\}_{k=1,2,\ldots}$, $s_k \in \bar{\gamma}$, d.h. eine Folge mit der Eigenschaft

$$\lim \|f - s_k\|_I = M := \inf\{\|f - s\|_I \mid s \in \bar{\gamma}\} \leqslant \|f - s_0\|_I .$$

In jedem abgeschlossenen Teilintervall von I kann man auf die gleichmäßige Beschränktheit der $|s_k(x)|$ schließen. Mit Standardschlüssen kann man zu einer Teilfolge übergehen, die im Sinne kompakter Konvergenz gegen eine Funktion $\bar{s} \in \bar{\gamma}$ strebt.

Für jedes abgeschlossene Teilintervall J von (α, β) gilt für die Teilfolge

$$\lim \|f - s_k\|_J \leqslant \|f - \bar{s}\|_J \leqslant M. \tag{5.2}$$

Ein Grenzübergang $J \to I$ ergibt

$$\|f - \bar{s}\|_I = \sup_{J \subset I} \|f - \bar{s}\|_J \leqslant M.$$

Also löst $\bar{s}$ das Approximationsproblem.

Gibt es ein s_0 in γ, so kann man zwar die Elemente der Minimalfolge aus γ wählen, es ist aber eine offene Frage, wann auch $\bar{s}$ selbst zu γ gehört.

Aus den im vorigen Abschnitt hergeleiteten Aussagen über die Nullstellen der Differenz zweier Funktionen aus $\bar{\gamma}$ folgt unmittelbar das hinreichende Kriterium.

SATZ 5.2. (a) *Die Funktion $s \in \bar{\gamma}$ ist eine beste Approximation der in I stetigen Funktion $f(x)$, wenn eine Alternante mit $\mathscr{L}(I) + 4 - d(s)$ Punkten für die Differenz $r(x) := s(x) - f(x)$ existiert.*

(b) *Die Funktion $s \in \bar{\gamma}$ ist bereits dann beste Approximation von $f(x)$, wenn* (a) *für ein Teilintervall I^* von I erfüllt ist und die Norm der Differenz $r(x)$ in I^* bereits den Wert $\| r \|_I$ der Norm für das Gesamtintervall hat.*

Zum Beweis nehme man an, daß zu s eine Alternante der angegebenen Punktanzahl existiert. Ist $\bar{s}$ eine bessere Approximation, so ergibt eine Abzählung der Nullstellen von

$$s(x) - f(x) - (\bar{s}(x) - f(x)) = s - \bar{s}$$

einen Widerspruch zu Satz 4.1. Damit ist (a) bewiesen.

In (b) ist schließlich s bereits nach (a) beste Approximation für das Intervall I^* und bereits in diesem Teilintervall von I nicht zu verbessern.

Zum Beweis von Satz 5.1 genügt der Satz 4.1 bereits in der schwächeren Form, daß für $r = s - \bar{s}$ mit $s \in \bar{\gamma}$ und $\bar{s} \in \gamma$ die Abschätzung

$$N(r; I) \leqslant \mathscr{L}(I) + 2 - d(s)$$

gilt, die als Spezialfall bewiesen wurde.

Ist nämlich in diesem Falle etwa $\bar{s} \in \bar{\gamma}$ eine bessere Approximation von f als s, so kann man $\bar{s}$ durch ein $\tilde{s}$ aus γ so gut approximieren, daß auch $\tilde{s}$ eine bessere Approximation ist als s und man kommt jetzt mit der schwächeren Form von Satz 4.1 aus.

LITERATUR

1. R. SCHABACK, Spezielle rationale Splinefunktionen, *J. Approximation Theory* **7** (1973), 281–292.
2. H. WERNER, Rationale Tschebyscheff-Approximation, Eigenwerttheorie und Differenzenrechnung, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **13** (1963), 330–347.
3. H. WERNER, Eigenwerttheorie und rationale Tschebyscheff-Approximation, ZAMM Bd. 43, Sonderheft GAMM-Tagung Karlsruhe, 1963.
4. H. WERNER, "Praktische Mathematik I," Mathematica Scripta 1, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.

Zusatz bei der Korrektur: In der Zwischenzeit erzielte weitere Ergebnisse findet man in folgenden Arbeiten:

5. D. BRAESS UND H. WERNER, Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Spline-Funktionen II, erscheint in *J. Approximation Theory*.
6. H. SCHOMBERG, Tschebyscheff-Approximation durch rationale Splinefunktionen mit freien Knoten, Dissertation, Münster (1973).